Vấn đề 1: NHẮC LẠI MỘT SỐ KIẾN THỨC LỚP 10

Mục đích của vấn đề này là nhắc lại một số kiến thức đã học ở lớp 10, nhưng có liên quan trực tiếp đến vấn đề sẽ học trong lớp 11. Vì thời gian không nhiều (khoảng 3 tiết) nên chúng ta sẽ không nhắc lại lý thuyết mà chỉ đưa ra một số dạng bài tập cơ bản, thông qua những bài tập này giúp các em học sinh lấy lại "phản xạ" toán sau kỳ nghỉ hè thú vị.

BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

Bài 1 Chứng minh đẳng thức sau

a) $\dfrac{3-4\cos 2x+4\cos 4x}{3-4\cos 2x+4\cos 4x}=\tan^4 x$ b) $\dfrac{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1-\cos x}}=\cot\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right),\pi<x<2\pi$

Chứng minh

a) Ta có

$$3\pm 4\cos 2x+\cos 4x=3\pm 4\cos 2x+2\cos^2 2x-1=\cos^2 2x\pm 2\cos^2 2x+1=\left(\cos 2x\pm 1\right)^2$$

Suy ra $VT=\dfrac{\left(\cos 2x-1\right)^2}{\left(\cos 2x+1\right)^2}=\dfrac{\left(1-2\sin^2 x-1\right)^2}{\left(2\cos^2 x-1+1\right)^2}=\tan^4 x=VP$

b) Nhân với lượng liên hợp của mẫu ta được:

$$VT=\frac{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1-\cos x}}=\frac{\left(\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1-\cos x}\right)\left(\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}\right)}$$

$$=\frac{1+\cos x+1-\cos x+2\sqrt{1-\cos^2 x}}{1+\cos x-1+\cos x}=\frac{1+\sqrt{\sin^2 x}}{\cos x}=\frac{1+|\sin x|}{\cos x}$$

Vì $\pi<x<2\pi$ nên $|\sin x|=-\sin x$, do đó

$$VT=\frac{1+|\sin x|}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{1-\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-\left(1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=VP$$

Bài 2 Rút gọn biểu thức sau

a) $\dfrac{\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin^3\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}$ b) $\dfrac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}-\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

Chứng minh

a) Ta có $\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left[-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=-\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cot x$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right]=-\sin(-x)=\sin x$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)=\sin\left[4\pi-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]=\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]=-\sin\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right]=-\cos(-x)=-\cos x$$

$$\Rightarrow \sin^3\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)=-\cos^3 x$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\tan\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right]=\cot(-x)=-\cot x$$

Khi đó,

$$\frac{\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin^3\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}=\frac{-\cot x.\sin x+\cos^3 x}{\sin x\left(-\cot x\right)}=\frac{-\frac{\cos x}{\sin x}\sin x+\cos^3 x}{-\sin x\frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$=1-\cos^2 x=\sin^2 x$$

b) Ta có $1+\sin 2x=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=\left(\sin x+\cos x\right)^2$

$$1-\tan^2\frac{x}{2}=1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos x}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$1+\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

Khi đó, $\dfrac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}-\dfrac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}-\dfrac{\dfrac{\cos x}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}=\sin x+\cos x-\cos x=\sin x$

Bài 3 Chứng minh rằng

a) $\sin 18^o=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ b) $\tan 15^o=2-\sqrt{3}$ c) $\tan 22^o30'=\sqrt{2}-1$

Áp dụng chứng minh đẳng thức sau:

1) $4\cos 36^o+\cot 7^o30'=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$

2) Chứng minh rằng $\sin 1^o$ và $\cos 1^o$ là các số vô tỷ.

Chứng minh

a) Ta có $54^o+36^o=90^o$ suy ra $\sin 54^o=\cos 36^o \Leftrightarrow \sin 3.18^o=\cos 2.18^o$

$$3\sin 18^o-4\sin^3 18^o=1-2\sin^2 18^o \Leftrightarrow (\sin 18^o-1)(4\sin^2 18^o+2\sin 18^o-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^o=1 \vee \sin 18^o=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \vee \sin 18^o=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Vì $0<\sin 18^o<1$ nên $\sin 18^o=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

b) Ta có $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\sqrt{\dfrac{1-(1-2\sin^2 x)}{1+(2\cos^2-1)}}=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$ $(\tan x>0)$ suy ra

$$\tan 15^0=\sqrt{\frac{1-\cos 30^o}{1+\cos 30^o}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=2-\sqrt{3}$$

c) Tương tự câu (b), nên để lại cho các em luyện tập.

Áp dụng

1) Ta có $4\cos 36^o=4\cos 2.18^o=4(1-2\sin^2 18^o)=4\left[1-2\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\right]=\sqrt{5}+1$

Nhận xét rằng: $\cot x = \cot 2x + \sqrt{1+\cot^2 2x}$. Thật vậy, ta có

$$\cot 2x + \sqrt{1+\cot^2 2x} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2x}} == \frac{1+\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1+2\cos^2 x - 1}{2\sin x\cos x} = \cot x.$$

Áp dụng điều này, ta được:

$$\cot 7^o 30' = \cot 15^o + \sqrt{1+\cot^2 15^o} = \frac{1}{\tan 15^o} + \sqrt{1+\frac{1}{\tan^2 15^o}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{1+\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}}$$

$$= 2+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

Khi đó, $4\cos 36^o + \cot 7^o 30' = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$.

2) Giả sử $\sin 1^o$ là số hữu tỷ, thế thì $\sin 3^o = 3\sin 1^o - 4\sin^3 1^o$ là số hữu tỷ, suy ra

$\sin 9^o = 3\sin 3^o - 4\sin^3 3^o$ là số hữu tỷ

$\Rightarrow \sin 27^o = 3\sin 9^o - 4\sin^3 9^o$ là số hữu tỷ

$\Rightarrow \sin 81^o = 3\sin 27^o - 4\sin^3 27^o$ là số hữu tỷ

Khi đó, $\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin 18^o = 2\sin 9^o\cos 9^o = 2\sin 9^o \sin 81^o$ là số hữu tỷ suy ra $\sqrt{5}$ là số hữu tỷ (MT)

Chứng minh $\cos 1^o$ là số vô tỷ hoàn toàn tương tự xem như bài tập

Bài 4 Chứng minh $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15} = 2^{-7}$

Chứng minh Ta có

$$\sin\frac{2\pi}{15} = 2\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15} \qquad \sin\frac{10\pi}{15} = 2\sin\frac{5\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}$$
$$\sin\frac{4\pi}{15} = 2\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15} \qquad \sin\frac{12\pi}{15} = 2\sin\frac{6\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}$$
$$\sin\frac{6\pi}{15} = 2\sin\frac{3\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15} \qquad \sin\frac{14\pi}{15} = 2\sin\frac{7\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}$$
$$\sin\frac{8\pi}{15} = 2\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}$$

Nhân vế theo vế 8 đẳng thức trên ta được

$$\sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{6\pi}{15}\sin\frac{8\pi}{15}\sin\frac{10\pi}{15}\sin\frac{12\pi}{15}\sin\frac{14\pi}{15}=2^7\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\sin\frac{3\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\times$$
$$\times\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\sin\frac{5\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\sin\frac{6\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\sin\frac{7\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=2^{-7}$$

(vì $\sin(\pi-x)=\sin x$)

Bài 5 Tính tổng sau

a) $P=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$

b) $H=\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}$

c) $S_1=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$ và $S=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$

d) $S=\sin x+\sin(x+d)+\sin(x+2d)+\cdots+\sin(x+nd)$

Giải a) Nhân cả hai vế với $2\sin\frac{\pi}{7}$ rồi áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng. $P=-\frac{1}{2}$

b) Hạ bậc rồi áp dụng câu (a)

c) Nhân cả hai vế với $2\sin\frac{x}{2}$ rồi áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng.

$$S_1=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, x\neq k2\pi\\ 0, x=k2\pi\end{cases} \text{ và } S_1=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, x\neq k2\pi\\ n, x=k2\pi\end{cases}$$

d) Nhân cả hai vế với $2\sin\frac{d}{2}$ rồi áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng

Bài 6 Tính giá trị các biểu thức sau

$$A=\sin^4\frac{\pi}{7}+\sin^4\frac{2\pi}{7}+\sin^4\frac{3\pi}{7} \text{ và } B=\cos^4\frac{4\pi}{7}+\cos^4\frac{5\pi}{7}+\cos^4\frac{6\pi}{7}$$

Giải Nhận xét rằng $B=\cos^4\frac{4\pi}{7}+\cos^4\frac{5\pi}{7}+\cos^4\frac{6\pi}{7}=\cos^4\frac{\pi}{7}+\cos^4\frac{2\pi}{7}+\cos^4\frac{3\pi}{7}$. Do đó,

$$B-A=\cos^4\frac{\pi}{7}-\sin^4\frac{\pi}{7}+\cos^4\frac{2\pi}{7}-\sin^4\frac{2\pi}{7}+\cos^4\frac{3\pi}{7}-\sin^4\frac{3\pi}{7}$$
$$=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$$

$$B+A=\cos^4\frac{\pi}{7}+\sin^4\frac{\pi}{7}+\cos^4\frac{2\pi}{7}+\sin^4\frac{2\pi}{7}+\cos^4\frac{3\pi}{7}+\sin^4\frac{3\pi}{7}$$
$$=1-2\cos^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{\pi}{7}+1-2\cos^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}+1-2\cos^2\frac{3\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7}$$
$$=3-\frac{1}{2}\sin^2\frac{2\pi}{7}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{4\pi}{7}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{6\pi}{7}$$
$$=3-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2}+\frac{1-\cos\frac{8\pi}{7}}{2}+\frac{1-\cos\frac{12\pi}{7}}{2}\right)$$
$$=\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}\right)$$

Mặt khác,

$$\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}$$
$$=\frac{-2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{14}}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

Như vậy, ta được

$$\begin{cases}B+A=\dfrac{17}{18}\\ B-A=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{21}{16}\\ B=\dfrac{13}{16}\end{cases}$$

Bài 7 Chứng minh rằng $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$. Từ đó, tính $S = \tan^2 10^o + \tan^2 50 + \tan^2 70$

Chứng minh Với những x để đẳng thức có nghĩa. Ta có

$$VP = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x} = \frac{3\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x}}{1 - 3\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x}{\cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x} = \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{4\cos^3 x - 3\cos x}$$

$$= \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \tan 3x = VT$$

Áp dụng công thức trên ta được

$$\tan^2 3x = \frac{9\tan^2 x - 6\tan^4 x + \tan^6 x}{1 - 6\tan^2 x + 9\tan^4 x} \ (*)$$

Với $x = 10^o$, từ (*) ta được $\dfrac{1}{3} = \tan^2 30^o = \dfrac{9\tan^2 10^o - 6\tan^4 10^o + \tan^6 10^o}{1 - 6\tan^2 10^o + 9\tan^4 10^o}$

$$\Leftrightarrow 3\tan^6 10^o - 27\tan^4 10^o + 33\tan^2 10^o - 1 = 0$$

Nghĩa là, $\tan^2 10^o$ là nghiệm của phương trình $3\,3x^3 - 27x^2 + 33x - 1 = 0$ (1).

Mặt khác, $\tan^2 3.10^o = \tan^2 3.50^o = \tan^2 3.70^o = \dfrac{1}{3}$ nên lập luận như trên ta cũng được $\tan^2 50^o, \tan^2 70^o$ là nghiệm của (1). Do đó, theo định lý Viet

$$S = \tan^2 10^o + \tan^2 50 + \tan^2 70 = \frac{-(27)}{3} = 9.$$

Bài 7 Cho biết tan*x*, tan*y* là nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$. Chứng minh rằng

$$\sin^2(x+y) + p\sin(x+y)\cos(x+y) + q\cos^2(x+y) = q. \ (*)$$

Chứng minh Ta xét hai trường hợp

1) $\cos(x+y) = 0 \Leftrightarrow x + y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Do tan*x*, tan*y* là nghiệm của $x^2 + px + q = 0$ nên

$$\tan x \tan y = q \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - y + k\pi\right)\tan y = q \Leftrightarrow q = 1$$

Lại do, $\cos(x+y) = 0 \Rightarrow \sin^2(x+y) = 1$. Khi đó, (*) đúng.

2) $\cos(x+y)\neq 0$, ta có

$$VT_{(*)}=\cos^2(x+y)\frac{\sin^2(x+y)+p\sin(x+y)\cos(x+y)+q\cos^2(x+y)}{\cos^2(x+y)}$$
$$=\frac{1}{1+\tan^2(x+y)}\left[\tan^2(x+y)+p\tan(x+y)+q\right]$$

Trong đó, $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\dfrac{-p}{1-q}$, suy ra $VT_{(*)}=q$.

Bài 8 Cho hàm số $f(x)=a\sin x+b\cos x$. Giả sử rằng $f(x_1)=f(x_2)=0,\forall x_1-x_2\neq k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$. Chứng minh rằng $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ (ĐH 1970)

Chứng minh Theo giả thiết ta có hệ

$$\begin{cases}a\sin x_1+b\cos x_1=0\\ a\sin x_2+b\cos x_2=0\end{cases},\forall x_1-x_2\neq k\pi$$

Xem hệ trên là hệ bậc nhất theo hai ẩn *a* và *b*. Ta có

$$D=\begin{vmatrix}\sin x_1 & \cos x_1\\ \sin x_2 & \cos x_2\end{vmatrix}=\sin x_1\cos x_2-\cos x_1\sin x_2=\sin(x_1-x_2)\neq 0\ \text{(vì } x_1-x_2\neq k\pi)$$

Suy ra hệ có nghiệm duy nhất $a=b=0$. Vậy $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 9 Biết rằng $\tan x_1,\tan x_2,\tan x_3$ là ba nghiệm của phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ và $\tan y_1,\tan y_2,\tan y_3$ là ba nghiệm của phương trình $x^3+cx^2+bx+a=0$. Chứng minh rằng

$$x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+y_3=k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Chứng minh Tính $\tan(x_1+x_2+x_3)$ và $\tan(y_1+y_2+y_3)$. Từ đó khẳng định

$$\tan(x_1+x_2+x_3)=-\tan(y_1+y_2+y_3)\Rightarrow x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+y_3=k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Bài 10 Cho $x+y+z=\dfrac{\pi}{4}$ và $\tan x,\tan y,\tan z$ là ba nghiệm của $x^3+px^2+qx+r=0$. Chứng minh rằng $p+1=q+r$

Chứng minh Áp dụng công thức cộng và định lý Viet.

Bài 11 Trong tam giác ABC, chứng minh các hệ thức sau:

$$1)\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$2)\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

$$3)\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$4)\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$$

$$5) tgA+\mathrm{t}\,gB+tgC=tgAtgBtgC$$

$$6) cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+cot\frac{C}{2}=cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}cot\frac{C}{2}$$

$$7) tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=1$$

$$8)\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$$

$$9)\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$$

$$10) l_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

$$11) bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

$$12)(b+c)\cos A+(a+c)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$$

$$13) abc\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)=a^2(p-a)+b^2(p-b)+c^2(p-c)$$

$$14) r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Bài 12 Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$, trong đó, *A, B, C* là ba góc của tam giác *ABC*.

HÌNH GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

Bài 1 Cho tam giác *ABC* có đỉnh $A(-1;-3)$

a) Cho biết hai đường cao $BH: 5x+3y-25=0$ và $CK: 3x+8y-12=0$. Hãy xác định tọa độ các đỉnh *B* và *C*.

b) Xác định tọa độ đỉnh *B* và *C* nếu biết đường trung trực của *AB* là $3x+2y-4=0$ và tọa độ trọng tâm $G(4,-2)$ của tam giác *ABC* (*ĐH Cần thơ*)

Bài 2 Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* có trong tâm $G(-2,-1)$ và các cạnh

$$AB: 4x+y+15=0 \text{ và } AC: 2x+5y+3=0$$

a) Tìm tọa độ đỉnh *A* và tọa độ trung điểm *M* của *BC*

b) Tìm tọa độ đỉnh *B* và viết phương trình cạnh *BC* (*ĐH Quốc gia*)

Bài 3 Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, viết phương trình các đường thẳng osng song với đường thẳng $d: 3x-4y+1=0$ và có khoảng cách đến (*d*) bằng 1. (*ĐH Huế*)

Bài 4 Cho tam giác *ABC* với $A(1;2), B(-2;-1), C(3;-2)$.

a) Lập phương trình đường phân giác trong góc *A*

b) Lập phương trình phân giác ngoài góc *B*.

Bài 5 a) Lập phương trình đường tròn qua ba điểm $A(3;3), B(1;1), C(5;1)$ (*ĐH Cần thơ*)

b) Cho $A(3,-2)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$. Viết phương trình tiếp tuyến với (*C*) vẽ từ *A* và tìm tọa độ tiếp điểm.

c) Lập phương trình đường tròn tâm $I(4;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: x+2y-5=0$